Aus den Anfängen der Infinitesimalrechnung

Von Harro Heuser in Karlsruhe

Kaum ein anderes Stück der Mathematikgeschichte ist so bewegt und bewegend und so sehr in den Gesamtkosmos des Geistes eingefügt wie die Geschichte des Ringens um die „Infinitesimalrechnung". Es ist eine lange und dramatische Geschichte, eine Geschichte mit Aufschwüngen und Abstürzen, mit Freundschaften und Feindschaften — eine sehr menschliche Geschichte. In diesem Geist will ich ein weniges von ihr erzählen. Ich beginne mit Pythagoras von Samos, geb. um 570 v. Chr.

Hüten wir uns davor, in Pythagoras nichts anderes zu sehen als den Mann des Dreieckssatzes. Erstens stammt der Satz gar nicht von ihm, und zweitens war Pythagoras im Hauptberuf nicht Mathematiker, sondern Erlöser, der im süditalienischen Kroton ein florierendes Heiligungsinstitut betrieb. Diesen Mann aber hat Bertrand Russell einen der bedeutendsten Menschen genannt.[1] Was ist das Bedeutende an Pythagoras? Gewiß nicht sein Gebot, um alles in der Welt keine Bohnen zu essen. Das Bedeutende ist seine kühne These, die Welt sei ganz und gar *mathematisch strukturiert*: „Alles ist Zahl." Diese Eingebung des Pythagoras ist Anfang und Wegweiser der mathematischen Naturwissenschaft geworden — und wie sehr eine nach *Mathematisierung* drängende Wissenschaft die „Infinitesimalrechnung" fördern mußte, werden wir noch sehen.[2]

Unmittelbarer mit der „Infinitesimalrechnung" hat eine Entdeckung zu tun, die im Kreis der Pythagoreer gemacht wurde: die Entdeckung, daß es *inkommensurable Strecken* gibt und entsprechend auch inkommensurable Flächen und Volumina. Das aber hatte verheerende Folgen! Da die griechischen Mathematiker nur *natürliche* Zahlen benutzten, konnten sie beispielsweise nun nicht mehr unbefangen zwei Flächen F_1, F_2 miteinander vergleichen, sie konnten nicht mehr sagen: „F_1 verhält sich zu F_2 wie m zu n" (mit *natürlichen* Zahlen m, n). Sie konnten also auch nicht mehr den ehrwürdigen Satz aussprechen „Zwei Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über ihren Durchmessern".

Nicht weniger bestürzend war das Dunkel, das sich nun über die *Struktur* der geometrischen Größen legte. Sollte man sich in Anlehnung an die physikalische Atomistik etwa eine Strecke aus kleinsten, unteilbaren

---

[1] Bertrand Russell: History of Western Philosophy, London 1961, S.49

[2] Näheres über Pythagoras und die Hintergründe des „Alles ist Zahl"-Theorems in dem Buch des Verfassers *Als die Götter lachen lernten. Griechische Denker verändern die Welt*, München-Zürich 1992

(aber *ausgedehnten*) Teilchen aufgebaut denken, gewissermaßen als eine Perlenschnur? Aber bei einer solchen „geometrischen Atomistik" könnte es keine Inkommensurabilität geben: Die Längen zweier „Perlenschnüre" würden sich ja immer verhalten wie die Anzahlen ihrer „Perlen". Blieb also nur der Ausweg, eine Strecke aus *ausdehnungslosen* Teilen aufzubauen. Aber wie konnte eine „Summe" von Ausdehnungslosem etwas Ausgedehntes ergeben? Solche Probleme – für sie steht der Name des „unüberwindlichen" Dialektikers und Paradoxenschmiedes Zenon von Elea (1. Hälfte des 5. Jahrhunderts v. Chr.)[3] – quälten noch im 17. Jahrhundert die Schöpfer der Infinitesimalrechnung.

Das Phänomen der Inkommensurabilität war elektrisierend, und der achtzigjährige Platon riet denn auch zu häufigen Gesprächen über diesen, wie er meinte, faszinierenden Gegenstand: „Alte Leute können sich damit viel reizvoller unterhalten als mit dem Brettspiel."[4]

In dieser prekären Situation brachte ein Geist ersten Ranges die Wende: Eudoxos von Knidos, geb. um 408 v. Chr. Eudoxos schuf eine geniale Proportionenlehre, die das geometrische Gegenstück zu einer (bis tief in das 19. Jahrhundert fehlenden) Theorie der irrationalen Zahlen ist. Mit ihr in der Hand konnte man nun wieder guten Gewissens von dem *Verhältnis* geometrischer Gebilde reden, und so ausgerüstet entwickelte Eudoxos als nächstes eine Methode, die strenge Beweise von Proportionalsätzen erlaubte, also von Sätzen wie „Zwei Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über ihren Durchmessern". Im 17. Jahrhundert hat man sie auf den ganz unglücklichen Namen „Exhaustionsmethode", „Ausschöpfungsmethode" getauft. Sie beruht auf einem Satz, den man „Wegnahmesatz" nennen kann, und der im wesentlichen besagt, daß man durch fortgesetztes Halbieren einer ersten Größe immer unter eine zweite (gleichartige) Größe gelangen kann. Ich deute nun an, wie Eudoxos den Kreisesatz bewiesen hat.[5]

Im ersten Schritt denkt sich Eudoxos einen Kreis K und eine beliebige Größe ε vorgegeben und beschreibt ihm ein regelmäßiges Polygon P mit

$$(1) \qquad K \setminus P < \varepsilon$$

ein. Das ist ihm dank des Wegnahmesatzes möglich.

[3] S. die Texte in Oskar Becker: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, suhrkamp taschenbuch wissenschaft 114, Frankfurt/M. 1975, S. 41-43

[4] Platon: Gesetze 820c

[5] Es geht mir dabei nur um die *Struktur* des Beweises. Eine detaillierte Ausführung findet man in meinem *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*, 8. Aufl. Stuttgart 1993, S. 638f.

Im zweiten Schritt betrachtet er zwei Kreise K_1, K_2 mit den Durchmessern d_1, d_2. Die Behauptung lautet

$$K_1 : K_2 = d_1^2 : d_2^2. \tag{2}$$

Und nun kommt die typische Schlußweise: der *doppelte Widerspruchsbeweis.* Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann wäre mit einer gewissen Flächengröße $F \neq K_2$ gewiß

$$K_1 : F = d_1^2 : d_2^2. \tag{3}$$

Wegen $F \neq K_2$ muß

$$\text{entweder } F < K_2 \quad \text{oder} \quad F > K_2$$

sein. Und nun wird jede dieser beiden Annahmen mittels (1) zu einem Widerspruch geführt. Also gilt tatsächlich (2).[6]

Uns Späteren mag es scheinen, als läge dieser Methode unser *Grenzwertbegriff* zugrunde. Vom griechischen Standpunkt aus ist dies jedoch keineswegs der Fall. Die Griechen haben den Grenzwertbegriff niemals formuliert (so sehr sie über *alles* redeten, was sie dachten). Ja, sie haben noch nicht einmal unendliche Folgen ins Auge gefaßt, erst recht nicht die *Endstücke* unendlicher Folgen, die doch beim Begriff des Grenzwertes die Hauptrolle spielen. An die Stelle eines Konvergenzarguments tritt denn auch etwas ganz anderes: *ein doppelter Widerspruchsbeweis.*

Der unübertroffene Meister der Exhaustionsmethode ist Archimedes von Syrakus gewesen (287–212 v. Chr.). Aber dieser geniale Mann ist noch aus einem anderen Grunde für uns interessant. Die Exhaustionsmethode konnte nur eine *Beweis-*, keine *Entdeckungs*methode sein; sie griff erst, wenn das Ergebnis schon vorlag (ähnlich wie die Methode der vollständigen Induktion). 1906 wurde seine Schrift *Die mechanische Methode* entdeckt, in der er uns ein Verfahren zum *Finden* von Ergebnissen auseinandersetzt. „Es ist nämlich leichter“, schreibt er einleitend, „wenn man durch diese Methode vorher eine Vorstellung von den Fragen gewonnen hat, den Beweis herzustellen, als ihn ohne eine vorläufige Vorstellung zu erfinden.“[7] (Diesen Fingerzeig eines der Großen unserer Wissenschaft kann man auch in der Lehre nicht ernst genug nehmen.) Der Grundgedanke des Verfahrens ist, sich ebene Gebilde aus „Linienelementen“ und räumliche

[6] Die Eudoxische Proportionenlehre und „Exhaustionsmethode“ sind uns durch Euklids *Elemente* überliefert; s. dort die Bücher V und XII.

[7] Archimedes: Werke, Darmstadt 1983, S. 383

aus „Flächenelementen" aufgebaut zu denken, ähnlich wie ein Gewebe aus Fäden und ein Buch aus Seiten zusammengesetzt ist. Archimedes scheint hier der verpönten „geometrischen Atomistik", der später so genannten Theorie der „Indivisibeln" (griech. *atomos* = lat. *indivisibilis* = deut. *unteilbar*) zu frönen — aber anders als die Mathematiker des 17. Jahrhunderts hat er seine „mechanisch" gefundenen Ergebnisse *stets* mit strengen Exhaustionsbeweisen untermauert.

In der Renaissance wurde die griechische Philosophie und Wissenschaft zu neuem Leben erweckt; zur philosophischen Leitfigur wurde der „göttliche Platon", zur mathematischen der „göttliche Archimedes". (Mit dem Adjektiv „göttlich", *divus*, ging die Renaissance nicht eben sparsam um.) Mit Platon - im Kern seines Denkens ein reinblütiger Pythagoreer[8] - drang wieder die alte pythagoreische Lehre vor, die Welt sei *mathematisch* gebaut und geordnet. Die Männer, die diese Ideen mit Feuer propagierten, waren vor allem Galilei (1564 - 1642) und der nur wenig jüngere Kepler (1571-1630). „Das Buch der Natur ist in mathematischer Sprache geschrieben", verkündet Galilei,[9] und Kepler ruft enthusiastisch aus:

> Die Geometrie, vor der Entstehung der Dinge von Ewigkeit her zum göttlichen Geist gehörig,...hat Gott die Urbilder für die Erschaffung der Welt geliefert und mit dem Bild Gottes ist sie in den Menschen übergegangen.[10]

Uns Heutigen erscheint die Mathematisierung der Physik als pure Selbstverständlichkeit. In Galileis und Keplers Tagen war sie nichts dergleichen. Sie mußte erst noch in leidenschaftlichen Kämpfen durchgesetzt werden gegen das lähmende Verdikt des immer noch mächtigen Aristoteles, die Mathematik sei in der Naturwissenschaft zu nichts nütze, denn die grobe Natur füge sich nicht den überfeinerten Formen der Mathematik.[11]

Die wirkliche Welt, der sich die Renaissance nach den Jenseitssehnsüchten des Mittelalters wie berauscht zuwandte, ist eine Welt der Bewegungen. (Das hatte schon Heraklit von Ephesos im 6. Jahrhundert v. Chr.

[8] S. etwa Aristoteles: Metaphysik 987a

[9] Galilei: Il saggiatore 6

[10] Johannes Kepler: Weltharmonik, übers. und eingel. von Max Caspar, München 1990, Buch IV, Kap. 1, S. 214

[11] Aristoteles: Metaphysik 995a; Galilei: Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, Stuttgart 1982, S. 14 und 215

gelehrt.) *Bewegung* mußte also ein Hauptobjekt der neuen mathematisierten Naturforschung werden – und so geschah es bei Kepler und Galilei tatsächlich. Damit wurde die Tür zu dem aufgestoßen, was später „Infinitesimalrechnung", noch später „Differential- und Integralrechnung" hieß. Bei seiner Untersuchung der Flächengeschwindigkeit eines Planeten beweist Kepler im 40. Kapitel der *Nova Astronomia* (1609) die Archimedische Formel $F = \frac{1}{2}Ur$ für die Fläche F eines Kreises mit Umfang U und Radius r – aber ganz anders als Archimedes[12] tut er es mittels einer „Infinitesimalbetrachtung": Er interpretiert den Kreis als ein reguläres Polygon mit unendlich vielen Ecken, denkt sich Radien zu diesen Ecken gezogen und faßt nun die Kreisfläche als Summe der so entstehenden, unendlich vielen infinitesimalen Dreiecke mit Grundlinien ΔU und Höhen r auf; hierbei ist ΔU ein als geradlinig angesehener, unendlich kleiner Teil der Kreisperipherie. Indem er nun auf jedes dieser Dreiecke die Formel $\mathit{Inhalt} = \frac{1}{2} \triangle U \cdot r$ anwendet und alle diese Inhalte addiert, erhält er ohne jede Mühe das Archimedische Resultat. Diesen Husarenritt kommentiert er mit den Worten: „Ich erinnerte mich, daß in derselben Weise einst auch Archimedes den Kreis in unendlich viele Dreiecke zerlegte, als er das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser zu bestimmen suchte. Das ist ja der versteckte Sinn seines indirekten Beweises."[13] Archimedes wird sich im Grabe umgedreht haben.

Direkte Methoden dieses Schlages statt der indirekten „Exhaustions"verfahren benutzt Kepler sechs Jahre später in seinem Buch mit dem irdischen Titel *Nova stereometria doliorum vinariorum* (Neue Stereometrie der Weinfässer, 1615). Das Werk ist in Linz entstanden; Kepler hat damals über Fragen der Volumberechnung nachgedacht, weil er unzufrieden mit den kruden Methoden war, die von den dortigen Winzern zur Inhaltsbestimmung von Weinfässern benutzt wurden. Kepler war ein sparsamer Schwabe (nach eigenem Bekunden „in Geldsachen allzu zäh, im Wirtschaften hart"[14]) und wollte sich wohl durch Mathematik vor den österreichischen Winzern schützen.[15] Das Buch geht über diesen handfesten Zweck aber weit hinaus; es enthält eine enorme Fülle von Volumbestimmungen, die alle mit „modernen" infinitesimalen Prozeduren bewerkstelligt werden.

[12] S. den Satz I und seinen Beweis in der *Kreismessung* des Archimedes; sie ist abgedruckt in Archimedes: Werke, Darmstadt 1983

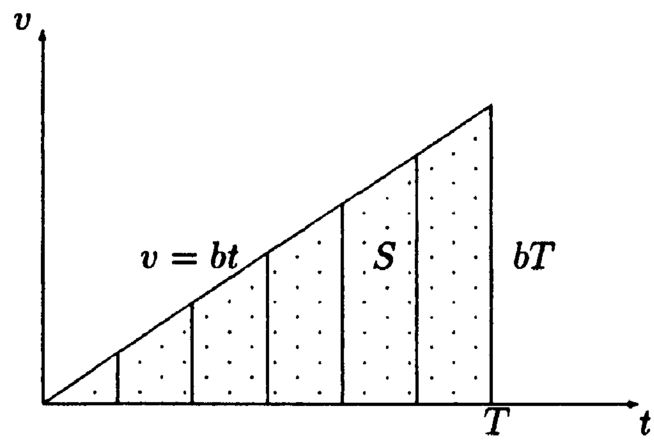
[13] Johannes Kepler: Neue Astronomie, übersetzt und eingeleitet von Max Caspar, München 1990, S. 246

[14] Johannes Kepler: Selbstzeugnisse, Stuttgart und Cannstatt 1971, S. 17

[15] S. dazu Johannes Kepler: Neue Stereometrie der Fässer, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften 165, Leipzig 1908, S. 99f.

(Die Kugel z. B. faßt Kepler als eine unendliche Summe infinitesimaler Kegel mit Spitzen im Mittelpunkt auf.) Die *Nova stereometria* hatte denn auch einen schwer zu überschätzenden Einfluß auf die heranwachsende „Infinitesimalrechnung" des 17. Jahrhunderts; der bedeutende Mathematikhistoriker Moritz Cantor hat sogar gemeint, sie sei „die Quelle aller späteren Kubaturen geworden".[16]

Die Keplerschen Methoden dürften auch Galilei beeinflußt haben. Jedenfalls gelingt dem Italiener mit ihrer Hilfe 1632 erstmals die Lösung einer Bewegungsdifferentialgleichung, bescheidener gesagt: Er gewinnt aus dem Geschwindigkeitsgesetz $v = bt$ durch „Integration" das Weggesetz $s = (1/2)bt^2$. Die in Fig. 1 eingezeichneten Parallelen zur v-Achse sind die Geschwindigkeiten des bewegten Körpers K. Diese Parallelen faßt Galilei aber auch als die „Geschwindigkeitsmomente" von K auf, d. h. als die infinitesimalen Strecken, welche K in einem unendlich kleinen Zeitintervall durchläuft. (Er hat wohl eine solche Parallele als ein schmales Rechteck der Höhe v und der kleinen Breite Δt interpretiert, dessen Inhalt $v\Delta t$ näherungsweise den im Zeitintervall Δt durchlaufenen Weg angibt; „Ein sehr schmales Rechteck ist kaum etwas anderes als eine Linie", hat um diese Zeit John Wallis nonchalant gesagt.[17]) Nach der Indivisibelnhypothese ist die in Fig. 1 schattierte Fläche S die „Summe" aller Parallelen zur



Figur 1

v-Achse. Aus der Deutung der letzteren als „Geschwindigkeitsmomente"

[16] Moritz Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Nachdruck der 2. Aufl. von 1900, Stuttgart 1965, Bd. II, S. 823

[17] Zitiert nach Carl B. Boyer: The History of the Calculus and its Conceptual Development, ed. New York 1959, S. 170f.

folgt damit, daß der von K in der Zeit T zurückgelegte Weg durch S wiedergegeben wird, also $= (1/2)T \cdot bT = (1/2)bT^2$ ist.[18]

Es lohnt nicht, über den Unterschied zwischen infinitesimalen und indivisiblen geometrischen Gebilden zu grübeln; man kann eigentlich nur konstatieren, daß er von Anfang an niemandem klar war. Wer versucht ist, die Indivisibeln für irgendwie „dünner" zu halten als die Infinitesimalien, möge sich durch das oben mitgeteilte Wort von John Wallis warnen lassen; er möge auch daran denken, daß der große Philosoph Thomas Hobbes (1588-1679) meinte, Linien hätten immer eine gewisse Breite und Oberflächen eine gewisse Dicke.[19] Wichtiger ist, daß Galilei von der Kraft der Indivisibelnmethode so überzeugt war, daß er seinen Freund Bonaventura Cavalieri (1598(?)-1647) dazu drängte, sie weiter auszubauen. Dieser veröffentlichte 1635 sein einflußreiches und ausnehmend dunkles Buch *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Geometrie, vorangebracht durch die neue Methode der Indivisibeln der Kontinua). In ihm versucht er, die etwas anrüchige *nova ratio* zu systematisieren. Sein wichtigstes Resultat ist das *Cavalierische Prinzip*: *Wenn zwei Raumkörper, die auf einer Ebene E stehen, in jeder Höhe flächengleiche Schnitte parallel zu E haben, so sind sie auch volumengleich.* Dunkel war Cavalieris Buch, weil er nirgendwo eine faßliche Erklärung der Indivisibeln gab. Zwölf Jahre später schob er das schon erwähnte suggestive Bild nach, daß eine ebene Figur aus parallelen Strecken aufgebaut sei wie ein Gewebe aus Fäden und eine räumliche aus parallelen Flächen wie ein Buch aus Seiten — wobei man sich freilich die geometrischen Fäden und Seiten *unendlich dünn* und in *„unbestimmter" Anzahl* vorstellen müsse.[20] Cavalieri wurde schon von seinen Zeitgenossen heftig kritisiert; überdies warf man ihm noch vor, er habe Keplers *Nova stereometria* stillschweigend geplündert; seine Indivisibeln seien eigentlich nichts anderes als Keplers Infinitesimalien. Cavalieri empfahl dennoch seine Methode mit großer Unbekümmertheit, weil sie eben ungleich bequemer sei als die schwerfällige Exhaustion, und schließlich konterte er mit einem bizarren *zweiten* Cavalierischen Prinzip: *„Strenge ist Sache der Philosophie, nicht der Mathematik"*.[21]

[18] Galilei: Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, Stuttgart 1982, S. 243-245. In dem Beweis findet sich übrigens schon vor Descartes und Fermat der Grundgedanke der analytischen Geometrie. Der Aristoteliker Simplicio kontert das Ganze mit seinem Lieblingsargument: „Man braucht in der Naturwissenschaft nicht die exquisite mathematische Strenge anzuwenden."

[19] Thomas Hobbes: English Works, Bd. VII, S. 67, 200ff., 438. S. dazu Carl B. Boyer, a. a. O. , S. 176

[20] Cavalieri: Exercitationes geometricae sex, S. 239f.

[21] Cavalieri, a. a. O., S. 241

Die Methoden Keplers und Cavalieris waren eine radikale Abkehr von der Mühsal der Exhaustion. Zahlreiche andere Mathematiker versuchten, das antike Verfahren zwar nicht geradezu abzuschaffen, aber doch so zu modifizieren, daß es weniger drückte, insbesondere versuchten sie, den doppelten Widerspruchsbeweis zu ersetzen durch ein frontales *Grenzwertargument.* Da man aber von „Konvergenz" nur die verschwommensten Vorstellungen hatte, konnten die Grenzübergänge kaum anders als ruchlos vollzogen werden. Archimedes war zwar allen das große Vorbild — nacheifern aber wollte ihm niemand. Es mochte genügen, ihn anzubeten.

Neben den Inhaltsproblemen gab es noch das Tangentenproblem. Auch dieses Problem war klassischen Ursprungs: Archimedes hatte Tangenten an seine Spirale, der etwa 25 Jahre jüngere Apollonios Tangenten an Kegelschnitte konstruiert. 1618 entdeckte Willebrord Snell das „Snelliussche Brechungsgesetz"; das Problem der Bestimmung von Normalen (und damit von Tangenten) wurde hinfort für die Konstrukteure von Mikroskopen und Teleskopen von größter Bedeutung. René Descartes (1596 - 1650) nannte das Tangentenproblem überschwenglich „das nützlichste und allgemeinste Problem", das er kenne.[22] Er konnte noch nicht wissen, daß die Italiener einmal die sehr nützlichen und sehr allgemeinen Schmiergelder zum Entsetzen jedes Mathematikers *tangenti* nennen würden.

Alle großen Mathematiker des 17. Jahrhunderts haben sich mit dem Tangentenproblem beschäftigt; dabei benutzen sie immer Pseudogrenzübergänge. Diese Limesprozesse, die keine sind, bestehen darin, daß man Terme, die man als „unendlich klein" im Vergleich zu anderen empfindet, einfach unter den Tisch fallen läßt. Im Ergebnis ist das alles nicht falsch; die *Bestimmung* der Ableitung läuft im Grunde so ab, wie wir heute die Ableitung *definieren*: Wir schreiben

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a+r(h), \tag{4}$$

und wenn $r(h) \to 0$ strebt für $h \to 0$, dann sagen wir, f besitze an der Stelle x die Ableitung a. Im 17. Jahrhundert schrieb man auch (4) hin (in der Regel für ein Polynom f, so daß man $r(h)$ explizit ausrechnen konnte), erkannte, daß $r(h)$ für kleine h sehr klein war (weil es Potenzen von h enthielt) und strich $r(h)$ nun einfach weg; denn, wie Barrow (1630-1677), Newtons Lehrer in Cambridge, sagte, „diese Glieder haben keinen

[22] Zitiert nach Carl B. Boyer, a. a. O., S. 166

Wert" (*etenim isti termini nihil valebunt*).[23]

Nicht etwa, daß scharfsinnige Geister das Anstößige solcher Prozeduren nicht empfunden hätten! Es war James Gregory (1638-1675), der 1667 in seiner *Vera circuli et hyperbolae quadratura* ausdrücklich darauf hinwies, daß hinter all diesen mysteriösen Manipulationen eigentlich ein neuartiger Prozeß stecke: eben der *Grenzprozeß*, und dabei denn auch das Wort „Konvergenz" einführte. Aber viel Aufsehen erregte er nicht in dieser Zeit einer piratenhaften Mathematik, die skrupellos aufs Beutemachen ausging. Schwerer verständlich ist schon, daß auch seine große Entdeckung des Jahres 1668 unbeachtet blieb: daß nämlich das Flächen- und das Tangentenproblem zueinander *invers* sind (was wir heute den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nennen). Zwei Jahre später entdeckte Barrow die Sache noch einmal, aber auch diesmal blieb sie ohne Wirkung. Sie war so sehr in Geometrie versteckt, daß sie nicht als eine *Hauptsache* ins Bewußtsein trat.[24] Das konnte sich erst ändern durch eine „Arithmetisierung", d. h., indem man an Stelle der überlieferten Geometrie die Buchstabenalgebra Vietas (1540 - 1603) und damit einhergehend die von Fermat und Descartes um 1637 geschaffene *analytische* Geometrie setzte. In diesem Prozeß war John Wallis (1616 - 1703) mit seiner *Arithmetica infinitorum* (1655) die treibende Kraft.[25] Wie die Mathematisierung der Naturwissenschaft ihren Widersacher in dem Philosophen Aristoteles gefunden hatte, so fand die Arithmetisierung der Grenzprozesse ihren Widersacher in dem Philosophen Thomas Hobbes: Wallis' Buch fertigte er als eine „Krätze von Symbolen" ab. Auf Newton freilich hatte diese „Krätze" einen tiefgreifenden Einfluß.

Der Durchbruch zu *allgemeinen Methoden* und einem *handlichen Kalkül* gelang erst Newton und Leibniz. Von ihnen will ich nun sprechen.

Newton kam 1642, im Todesjahr Galileis, auf die Welt (was einen an die Seelenwanderung glauben läßt). 1661 trat er in die Universität Cambridge ein und warf sich unter Barrows Anleitung auf Mathematik und Naturwissenschaften. 1665/66 wurde die Universität der Großen Pest wegen geschlossen. Der Dreiundzwanzigjährige zog sich in die Abgeschiedenheit seines Heimatdorfes Woolsthorpe zurück und dort, wo Fuchs und Hase

[23] Isaac Barrow: Lectiones geometricae X, Abschnitt XIV, Regel 1

[24] Nähere Darstellung der Barrowschen Überlegungen in meinem *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*, 8. Aufl., Stuttgart 1993, S. 654f.

[25] In diesem Buch führt Wallis übrigens das Unendlichkeitssymbol ∞ ein.

sich Gute Nacht sagen, legte er die Grundlagen seines *calculus*, seiner Mechanik, Gravitationslehre und Kosmologie und entdeckte mit Hilfe eines Prismas, das er auf einem Jahrmarkt preiswert erstanden hatte, daß weißes Licht aus Spektralfarben zusammengesetzt ist. Jede einzelne dieser Entdeckungen hätte für eine haltbare Unsterblichkeit ausgereicht.

Wie schon Galilei vor ihm, so geht auch Newton von dem Phänomen der *Bewegung* aus. Bereits im November 1665 löst er ein Problem, das wir so formulieren können[26]:

Bewegen sich zwei Körper A, B gemäß den Weg-Zeit-Gesetzen

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

besteht ferner eine Gleichung

$$F(x(t), y(t)) = 0, \tag{5}$$

so soll daraus eine Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten p, q von A, B gewonnen werden. Seine Überlegungen führt Newton an der Gleichung

$$F(x, y) = ax + x^2 - y^2 = 0 \tag{6}$$

vor; leicht modifiziert verlaufen sie folgendermaßen: Er geht davon aus, daß ein Körper sich in einer unendlich kleinen Zeitspanne o so bewegt, als habe er konstante Geschwindigkeit; in einer solchen Zeitspanne legt also A die Strecke po und B die Strecke qo zurück.[27] Wegen (6) ist daher auch

$$a(x + po) + (x + po)^2 - (y + qo)^2 = 0.$$

Wenn wir (6) beachten und durch o dividieren, so folgt

$$ap + 2xp - 2yq + p^2o - q^2o = 0.$$

Und jetzt kommt die charakteristische Schlußweise. Newton sagt: „Die Terme, in denen o enthalten ist, sind unendlich viel kleiner als die, in denen es nicht enthalten ist. Daher bleibt, wenn wir sie wegstreichen,

$$ap + 2xp - 2yq = 0.\text{''}$$

Das ist die gesuchte Beziehung zwischen p und q.

Hier sehen wir die arithmetischen Infinitesimalien in Aktion, diese exotischen Zugochsen der frühen Analysis, die je nach Bedarf ein Etwas und

[26] Newtons Text (in deutscher Übersetzung) ist abgedruckt in Oskar Becker, a. a. O., S. 146ff.

[27] Das Symbol o für eine unendlich kleine Größe stammt von James Gregory.

ein Nichts sein können. Newtons o ist zunächst ein Etwas, und deshalb darf er auch durch o dividieren. Nach der Division aber hat o seine Rolle als ein Etwas ausgespielt und wird in ein Nichts verwandelt, also $= 0$ gesetzt. Ein scharfsinniger Bischof, nämlich George Berkeley (1685-1753), hat später ironisch darauf hingewiesen, daß Newton hier einen Taschenspielertrick praktiziert: Indem er $o = 0$ setzt, „vernichtet" er seine erste Annahme $o \neq 0$, *behält aber die Folgerungen aus ihr bei.* Und grimmig fährt der Gottesmann fort:

> All das scheint mir eine höchst widerspruchsvolle Art der Beweisführung zu sein, wie man sie in der Theologie nicht erlauben würde.[28]

Diese Worte erschienen allerdings erst 1734, sieben Jahre nach Newtons Tod, und zwar in einer einflußreichen Schrift mit dem Endlostitel: *Der Analytiker oder eine Abhandlung, gerichtet an einen ungläubigen Mathematiker, in der untersucht wird, ob der Gegenstand, die Prinzipien und die Folgerungen der modernen Analysis deutlicher erfaßt oder einleuchtender hergeleitet sind als religiöse Mysterien und Glaubenssätze.* Mit dem „ungläubigen Mathematiker" war wohl Edmond Halley (1656-1742) gemeint (der Entdecker des Halleyschen Kometen), der die Lehren des Christentums ablehnte, weil sie „unbegreiflich" seien. Diesen Hochmut wollte Berkeley mit dem Hinweis dämpfen, daß auch Mathematiker „unbegreifliche Dinge [Infinitesimalien und das heikle Rechnen mit ihnen] für wahr halten".[29]

In den beiden Pestjahren gewinnt Newton auch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, und auch ihn gewinnt er durch *kinematische* Betrachtungen. Newton stellt sich das Problem, „die Natur einer gekrümmten Linie zu bestimmen, deren Fläche durch irgendeine Gleichung ausgedrückt wird".[30] Zu diesem Zweck geht er so vor: y sei die Fläche unter der Kurve $q = f(x)$ (s. Fig. 2). Das Rechteck $ADEB$ habe die Höhe 1, seine Fläche ist also $= x$. Die beiden Flächen x, y denkt er sich dadurch

[28] George Berkeley: Schriften über die Grundlagen der Mathematik und Physik, eingeleitet und übersetzt von Wolfgang Breidert, suhrkamp taschenbuch wissenschaft 496, Frankfurt/M. 1985, S. 97f.

[29] George Berkeley, a. a. O., S. 141

[30] Newton hat die mathematischen Ergebnisse seines Aufenthaltes in Woolsthorpe in einem Manuskript zusammengestellt, das erst in unseren Tagen unter dem Namen *The October 1666 Tract on Fluxions* im Druck erschienen ist. Man findet diesen Text in der von D. T. Whiteside herausgegebenen Sammlung *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Cambridge 1967ff., Bd. I, S. 400-448. Für den „Hauptsatz" s. dort S. 427f.

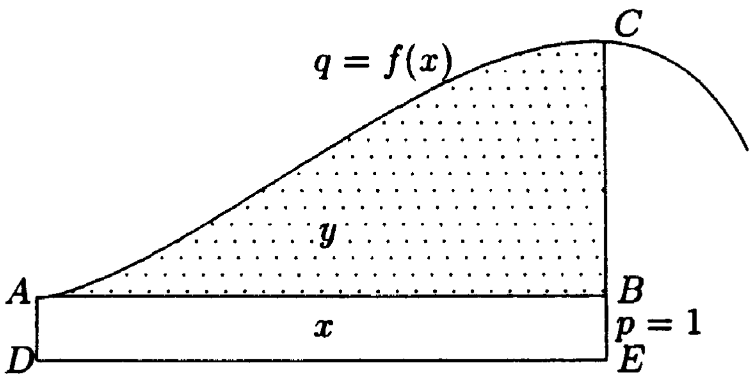
erzeugt, daß sich die Linie CBE mit der konstanten Geschwindigkeit $p = 1$ von links nach rechts bewegt. Und nun sagt er:

> Die Geschwindigkeiten, mit der [die Flächen x und y] wachsen, verhalten sich wie BE zu BC. Da aber die Bewegung [Geschwindigkeit], mit der x wächst, gleich $BE = p = 1$ ist, wird die Bewegung, mit der y wächst, gleich $BC = q$ sein.

Mit anderen Worten: Die zeitliche Änderungsrate $\dot{y}$ der Fläche y ist gleich der Ordinate $f(x)$; und da diese zeitliche Änderungsrate wegen $\dot{x} = 1$ mit der örtlichen übereinstimmt ($\dot{y} = \dot{y}/\dot{x} = dy/dx$), haben wir

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Das ist der Hauptsatz in der Flächensprechweise. Und daraus schließt Newton nun ohne weiteres, daß man umgekehrt die Fläche y, modern ausgedrückt, durch unbestimmte Integration finden könne.



Figur 2

Newtons bahnbrechender Gedanke ist hier, eine Fläche nicht mehr in der Tradition von Jahrtausenden als etwas statisch Gegebenes anzusehen, sondern in etwas Werdendes zu verwandeln, dabei ihr *Änderungsverhalten* zu studieren und sie dann durch „Antidifferentiation" aus ihrem Änderungsgesetz zu rekonstruieren. Mit all dem war nun endlich die Möglichkeit eröffnet, die geometrischen Flächenbestimmungen *kalkülmäßig* zu bewerkstelligen. Man brauchte ja nur Formeln und Regeln der Differentiation und darauf fußende Formeln und Regeln der Antidifferentiation zu gewinnen. Diese neuen Algorithmen stellen den ersten echten Fortschritt über

Archimedes hinaus dar. Durch all dies wuchsen die unzusammenhängenden geometrischen Aperçus des 17. Jahrhunderts fast über Nacht zu einer neuen, selbständigen Disziplin mit eigenen Begriffen und Methoden zusammen: dem *calculus*, der „Rechnung". Der Name selbst drückt schon aus, wo man das Revolutionäre des Neuen gesehen hat: Geometrische Inspiration wurde ersetzt durch regelhafte Rechnung.

Zum algorithmischen Nerv des *calculus* wurden die *Potenzreihen*. Bereits 1665 hatte Newton durch halbmystische Betrachtungen die *binomische Reihe* (ohne Konvergenzbedingung) entdeckt und mit ihrer Hilfe viele Funktionen in Potenzreihen entwickelt. Da er auch die Differentiationsformel

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

gefunden hatte und Potenzreihen unbedenklich *gliedweise* differenzierte und integrierte, fielen nun praktisch alle gängigen Funktionen ohne weiteren Aufwand seinem *calculus* anheim. Newton sah denn auch zu Recht in der Potenzreihenmethode das Herzstück der neuen „Rechnung".

Vorherrschend ist bei Newton, wie schon gesagt, der *Bewegungsgedanke*. Seine Funktionen hängen denn auch immer von der *Zeit* ab, und deshalb nennt er sie „Fluenten", „Fließende", ihre Veränderungsgeschwindigkeiten heißen „Fluxionen"; sein *calculus* trägt deshalb auch den Namen „Fluxionsrechnung".

Newton ist es bei Infinitesimalbetrachtungen nie recht wohl gewesen. In seiner Abhandlung *De quadratura curvarum*[31] versucht er denn auch, das mysteriöse „Unendlichkleine" zu verbannen, und greift das von ihm selbst praktizierte Streichen der *o*-Terme mit den berühmten Worten an: „In der Mathematik dürfen selbst die kleinsten Fehler nicht vernachlässigt werden."[32] Newton ahnt, daß all diese Schwierigkeiten nur durch einen völlig neuen Prozeß, eben den *Grenzprozeß*, überwunden werden können. Um ihn hat er intensiv gerungen und hat etwas wie eine Grenzwerttheorie unter dem Namen *Methode der ersten und letzten Verhältnisse* im Buch I seines epochalen Hauptwerks *Principia mathematica philosophiae naturalis* (1687) aufgestellt.[33]

[31] Fertiggestellt 1693, veröffentlicht erst 1704

[32] Oskar Becker, a. a. O., S. 154

[33] Isaac Newton: Mathematische Prinzipien der Naturlehre, hrsg. von J. Ph. Wolfers, Darmstadt 1963, S. 46-54

Hier muß man zunächst eine höchst rätselhafte Tatsache vermerken: Newton setzt in den *Principia*, also in dem Grundbuch der modernen Dynamik, den Apparat der Fluxionsrechnung überhaupt nicht ein, so sehr er diesen doch gerade zur Bewältigung von Bewegungsproblemen geschaffen hatte. Ganz allein mit der klassischen Geometrie kann er natürlich nicht auskommen, in irgendeiner Weise muß er, da es in seinem Buch um *Bewegungen* geht, Grenzbetrachtungen durchführen. Da ihn nun aber keine der überlieferten Methoden befriedigt, entwickelt er seine eigene *Methode der ersten Verhältnisse entstehender und letzten Verhältnisse verschwindender Größen* und stellt sie in einer Reihe von Lemmata dar. Wir blicken in die Schwierigkeiten dieses Komplexes hinein, wenn wir lesen:

> Diese Lemmata wurden vorausgeschickt, um die Mühsal der verwickelten Widerspruchsbeweise nach der Art der alten Geometer zu vermeiden.[34] Die Beweise mittels der Indivisibelnmethode sind zwar kürzer, aber da die Hypothese der Indivisibeln etwas anstößig ist und deshalb diese Methode als weniger geometrisch [mathematisch] angesehen wird, habe ich es vorgezogen, die Beweise der folgenden Sätze auf die ersten und letzten Summen und Verhältnisse entstehender und verschwindender Größen zurückzuführen.[35]

Warum ist „die Hypothese der Indivisibeln etwas anstößig“? Weil die geometrische Atomistik, wie er wenig später sagt, dem widerspricht, „was Euklid im 10. Buch der *Elemente* über inkommensurable Größen bewiesen hat“. Das im Kreis der Pythagoreer entdeckte Phänomen der Inkommensurabilität macht eben die geometrische Atomistik unmöglich; das haben wir schon gesehen. Eudoxos und Archimedes waren deshalb den mühseligen Weg der doppelten Widerspruchsbeweise gegangen; Newton beginnt stattdessen, eine Grenzwertmethode zu entwickeln. Die Inkommensurabilität war ein großes Movens der Mathematik.

Was ihm dabei vorschwebte, können wir etwa folgendermaßen beschreiben. Sind zwei „verschwindende Größen“ gegeben, also zwei Funktionen $f(t), g(t)$ mit

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \lim_{t \to t_0} g(t) = 0,$$

[34] Er denkt hier an die doppelten Widerspruchsbeweise, mit denen Eudoxos und Archimedes dem Grenzprozeß aus dem Weg gingen.

[35] Isaac Newton, a. a. O., S. 53

so will er nicht mehr den Quotienten

$$\frac{\lim_{t \to t_0} f(t)}{\lim_{t \to t_0} g(t)}$$

betrachten — das war das verworrene Bemühen der Infinitesimalmathematiker, zu dessen Gelingen sie fallweise die Null als eine doch nicht ganz und gar verschwindende Größe ansehen mußten —, vielmehr will er statt dessen nun

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)}{g(t)}$$

berechnen. Dieser Grenzwert ist das „letzte Verhältnis" der verschwindenden Größen $f(t)$ und $g(t)$. Das „erste Verhältnis" entstehender Größen ist begrifflich dasselbe. In Newtons Worten:

> Die letzten Verhältnisse, mit denen Größen verschwinden, sind in Wirklichkeit nicht die Verhältnisse letzter Größen, sondern Grenzwerte, denen sich die Verhältnisse unbegrenzt abnehmender Größen ständig nähern und denen sie näher kommen als irgendeine vorgegebene Differenz, welche sie jedoch niemals überschreiten und auch nicht erreichen, bis die Größen *in infinitum* abgenommen haben.[36]

Schon diese Formulierung zeigt, wie schwer sich Newton mit der Idee des Grenzwerts tut. Die „ε-Definition" wirft zwar ihren Schatten voraus, aber dann kommt die störende Vorstellung, daß ein Grenzwert nie *überschritten*, nicht einmal *erreicht* wird — und diese Vorstellung hat in den Diskussionen des folgenden Jahrhunderts eine uns kaum noch begreifliche Rolle gespielt und das Verständnis des Grenzwertbegriffs nachhaltig behindert. Noch mehr zeigen die folgenden dunklen Worte, mit denen Newton ein vorweggenommenes Bedenken auszuräumen versucht, wie mühsam dieser gewaltige Geist mit einem Begriff ringt, den wir heute unseren Schülern und Studenten vielleicht doch etwas zu nonchalant auftischen:

> Es könnte vielleicht eingewandt werden, daß es kein letztes Verhältnis verschwindender Größen gibt, denn bevor die Größen verschwunden sind, ist ihr Verhältnis nicht das letzte, und nachdem sie verschwunden sind, ist kein Verhältnis vorhanden.

[36]Isaac Newton, a. a. O., S. 54

> Aber mit demselben Argument könnte man behaupten, daß ein Körper, der an einem bestimmten Ort ankommt und dort anhält, keine letzte Geschwindigkeit hat. Denn die Geschwindigkeit vor der Ankunft des Körpers an diesem Ort ist nicht seine letzte Geschwindigkeit, nachdem er aber angekommen ist, gibt es keine Geschwindigkeit mehr. Die Antwort ist jedoch leicht, denn unter der letzten Geschwindigkeit wird diejenige verstanden, mit der der Körper sich in genau dem Augenblick bewegt, in dem er ankommt, nicht aber seine Geschwindigkeit, bevor er an seiner letzten Stelle ankommt und die Bewegung aufhört, und auch nicht die Geschwindigkeit danach. Die letzte Geschwindigkeit ist also diejenige Geschwindigkeit, mit der er an seiner letzten Stelle ankommt und mit der die Bewegung aufhört. Und in derselben Weise ist unter dem letzten Verhältnis verschwindender Größen dasjenige Verhältnis dieser Größen zu verstehen, mit dem sie verschwinden, nicht dasjenige, bevor sie verschwinden oder nachdem sie verschwunden sind.[37]

Indem er die „ersten Verhältnisse entstehender Größen" verwendet, *definiert* Newton in *De quadratura curvarum* zum ersten Mal seine Fluxionen, die ihm bisher als *Geschwindigkeiten* intuitiv verständlich gewesen waren:

> Fluxionen verhalten sich sehr genau wie die Zunahmen der Fluenten, die in gleichen, aber sehr kleinen Zeiträumen erzeugt werden, und um genau zu reden: Sie stehen im ersten Verhältnis der gerade beginnenden Zunahmen.[38]

Das bedeutet in unserer Sprechweise: Sind x, y zwei Fluenten, so ist

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{o \to 0} \frac{y(t+o) - y(t)}{x(t+o) - x(t)}.$$

Ist x die Zeit selbst ($x = t$), so haben wir in dieser Formel gerade unsere Definition der Ableitung $\dot{y}(t)$. Freilich nur dann, wenn Newton tatsächlich einen *Grenzübergang* $o \to 0$ vollzogen und nicht etwa nach einigen Umformungen des Differenzenquotienten, die er unter der Voraussetzung $o \neq 0$ macht, anschließend *gegen* ebendiese Voraussetzung einfach $o = 0$ gesetzt hat. Gerade das aber hat ihm der kritische Bischof Berkeley vorgeworfen.

[37] Isaac Newton, a. a. O., S. 54
[38] Oskar Becker, a. a. O., S. 153

Weidlich lustig macht sich Berkeley insbesondere über die Fluxionen von Fluxionen, also über die höheren Ableitungen. Es falle unserer Vorstellungskraft schon sehr schwer, kommentiert er ironisch,

> Zunahmen von fließenden Größen...im allerersten Ursprung oder Anfang ihrer Existenz, bevor sie endliche Teilchen werden, zu begreifen. Und noch schwieriger scheint es, die abstrakten Geschwindigkeiten dieser entstehenden, unvollständigen Wesenheiten zu begreifen. Aber die Geschwindigkeiten der Geschwindigkeiten...übersteigen...jedes menschliche Verständnis...Die Anfangsgeschwindigkeit einer Anfangsgeschwindigkeit, die entstehende Zunahme einer entstehenden Zunahme, d. h. von etwas, das keine Größe besitzt, — ...die klare Vorstellung davon wird, wenn ich nicht irre, als unmöglich erkannt werden.[39]

Etwas später stößt er mit den berühmten Worten nach:

> Und was sind diese Fluxionen? Die Geschwindigkeiten verschwindender Inkremente. Und was sind ebendiese verschwindenden Inkremente? Sie sind weder endliche Größen noch unendlich klein und doch auch nicht nichts. Dürfen wir sie nicht die Gespenster abgeschiedener Größen nennen.[40]

Ich komme zu Leibniz.

Er wurde 1646, vier Jahre nach Newton, geboren, studierte Jura und ging 1672 im Auftrage des Kurfürsten von Mainz in diplomatischer Mission nach Paris. Dort lernte er Huygens (1629-1695) kennen, arbeitete sich unter seiner Anleitung tief in die zeitgenössische Mathematik hinein — und erfand 1675/76 (also etwa zehn Jahre später als Newton) seine Version des *calculus*. Die erste Veröffentlichung erschien freilich erst 1684. Ihr barocker Titel lautete: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (Eine neue Methode für Maxima und Minima, auch für Tangenten, die weder durch gebrochene noch durch irrationale Größen behindert wird, und ein einzigartiger Kalkül für jene).[41] Die Arbeit betraf nur die „Differentialrechnung"; sie war so kurz, so dunkel und

[39] George Berkeley, a. a. O., S. 89
[40] George Berkeley, a. a. O., S. 121
[41] Eine deutsche Übersetzung findet man in *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften* 162, Leipzig 1920

so sehr durch Druckfehler entstellt, daß selbst die Brüder Jakob und Johann Bernoulli meinten, sie sei eher ein Rätsel als eine Erklärung (*une énigme plutôt qu'une explication*[42]). Zwei Jahre später (1686) erschien die Darstellung seiner „Integralrechnung“, seines *calculus summatorius.* Der anlockende Titel lautete: *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Über eine tief verborgene Geometrie und die Analysis der Indivisibeln und unendlichen Größen). 1693 zeigte er, wie man Quadraturen auf „inverse Tangentenprobleme“ (Bestimmung von Stammfunktionen) zurückführen kann.

Ich will nicht näher auf die Entwicklung des Leibnizschen Kalküls eingehen, sondern nur so viel sagen, daß bei Leibniz nicht Bewegungsprobleme im Vordergrund standen, sondern die „klassischen“ Tangenten- und Inhaltsprobleme und daß er sich ihnen auf dem Weg arithmetischer Analogien (Differenzenfolgen, Summenfolgen) näherte. Aber dazu hätte man keinen Leibniz gebraucht, weil man schon einen Newton hatte. Neu, originell und in höchstem Maße fruchtbar an dem Leibnizschen *calculus* war etwas anderes: die genialen *Bezeichnungen* $dx, dy, \int f(x)dx$ und die ein für allemal formulierten *Rechenregeln.* (Newton hatte sich um derartiges wenig gekümmert.) Allein schon hierdurch hat der Leibnizsche *calculus* gewissermaßen eine eingebaute Intelligenz. Leibniz meinte denn auch, sein Kalkül führe *presque sans meditation* zu Resultaten und enthebe einen der Notwendigkeit, *de travailler avec l'imagination.*[43]

Der Leibnizsche Kalkül korrespondierte hervorragend „dem innersten Wesen vielfach vorkommender Bedürfnisse“ (C. F. Gauß), und zwar sowohl in der Mathematik als auch in der Physik: Die „Differentialgleichungen“, die damals tatsächlich Gleichungen zwischen Differentialen waren, etwa $dy = \alpha y dx$, — diese Differentialgleichungen waren den Bedürfnissen der Physik geradezu auf den Leib geschrieben und lösten denn auch eine stürmische Entwicklung gerade dieser Wissenschaft aus. Freilich nur auf dem Kontinent. Die englischen Mathematiker und Physiker begingen den selbstmörderischen Fehler, sich in dem elenden Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton blindlings hinter ihren großen Landsmann zu stellen und den ausländischen *calculus* mit vaterländischer Borniertheit zu verwerfen. Die Folge war, daß die kontinentale Wissenschaft mit Riesenschritten an der englischen vorüberzog. Dieser Zustand änderte sich erst im Anfang des 19. Jahrhunderts. Damals wurde ausgerechnet in Newtons

[42] G. W. Leibniz: Mathematische Schriften, Hildesheim-New York 1971, Bd. III/1, Fußnote auf S. 5
[43] G. W. Leibniz: Mathematische Schriften, Bd. II, S. 123

Universität, in Cambridge, eine Gesellschaft mit der Absicht gegründet, die „Prinzipien des reinen *d*-Ismus einzuführen *in opposition to the dot-age of the University*". *Dot-age* ist das Zeitalter der (Newtonschen) Punkte. Der schwarze Humor des Programms tritt erst zutage, wenn man daran denkt, daß *dotage* (ohne Bindestrich) Altersschwachsinn heißt.

Seine „Beweise" führt Leibniz im Geist der Zeit mit Infinitesimalbetrachtungen, also mit Argumenten, die uns von dem frühen Newton her vertraut sind. Sie mußten daher auf eine Kritik stoßen, wie sie diesem schon entgegengeschlagen war. Der weltmännische Leibniz freilich schüttelte sie leichter ab als der Grübler von Cambridge. Auf Fragen der Art, wie sich unendlich kleine Größen denn von Null unterscheiden, warum man sie vernachlässigen dürfe, als seien sie Null, und wie denn eine Summe unendlich kleiner Größen ein Etwas ergeben könne — auf diese sehr bohrenden Fragen antwortete Leibniz sehr ausweichend. Abwiegelnd warnte er vor „übergenauen Kritikern" und gab den Rat, man solle doch nicht aus übertriebener *scrupulositas* die Früchte der Erfindungen verschmähen.[44] Es ist, als rede ein wiederauferstandener Cavalieri.

Nicht einmal vor fragwürdigen Vergleichen schreckte Leibniz zurück, um seine Differentiale dem intuitiven Verständnis näher zu bringen, etwa indem er sagte, dy verhalte sich zu y wie ein Sandkorn zur Erde oder wie die Erde zum Himmel.[45] Es hatte sich übrigens gut getroffen, daß man erst vor kurzem mit Hilfe des Mikroskops die aufregende Entdeckung von Kleinstlebewesen in Wassertropfen gemacht hatte. Wie — sollte man die Differentiale nicht auch mit diesen Winzlingen vergleichen dürfen? Johann Bernoulli riskierte es, aber hier warnte ihn Leibniz: Diese *animalcula* seien zwar *sehr* klein, aber *unendlich* klein seien sie noch nicht.[46]

Kein Wunder, daß Berkeley sich angesichts dieser Zustände zu seiner schneidenden Kritik des *calculus* aufgerufen fühlte. Bissig notierte er, diese zuchtlose Rechnerei gelange zu ihren Wahrheiten nur durch eine Kompensation der Fehler.[47] Michel Rolle (1652 - 1719) meinte noch bissiger, der *calculus* sei nichts als ein abgefeimtes System machiavellistischer Machinationen: „*Dans ce calcul on fait revivre et mourir les differentielles à son gré, ne consultant en cela que les besoins qu'en a pour la solution des problemes.*"[48] Er selbst hat sich übrigens beim „Satz von Rolle" vor

[44] G. W. Leibniz: Mathematische Schriften, Bd. V, S. 320-328, insbes. S. 322
[45] G. W. Leibniz: Mathematische Schriften, Bd. IV, S. 89
[46] G. W. Leibniz: Mathematische Schriften, Bd. III/2, S. 518 und 524
[47] George Berkeley, a. a. O., S. 104-106
[48] G. W. Leibniz: Mathematische Schriften, Bd. III/2, S. 642

solchen logischen Skrupellosigkeiten gehütet, und zwar auf die probateste Weise: Er hat überhaupt keinen Beweis geführt, sondern den Satz einfach hingeschrieben.

Leibniz hatte schon in seiner ersten Abhandlung zur Differentialrechnung seinen *calculus* auf ein physikalisches Problem angewandt: Er hatte aus dem Fermatschen Prinzip das Snelliussche Brechungsgesetz hergeleitet und stolz hinzugefügt:

> Andere hochgelehrte Männer haben auf vielen gewundenen Wegen gesucht, was jemand, der in diesem *calculus* bewandert ist, in drei Zeilen wie durch Magie bewerkstelligen kann.[49]

Seinen eigentlichen Triumphzug durch die Physik aber begann der Leibnizsche *calculus* erst mit den Brüdern Jakob und Johann Bernoulli. Leibniz selbst hat schon 1694 von ihnen gesagt, sie seien die ersten gewesen, die mit größtem Erfolg bezeugt hätten, wie enorm die Kraft des neuen *calculus* sei, „physiko-mathematische Probleme zu lösen, zu denen die Tür bisher verschlossen schien".[50] Das geschah hauptsächlich mit dem Werkzeug einer sich mehr zufällig als systematisch entwickelnden Theorie der Differentialgleichungen. 1690 löste Jakob Bernoulli mit diesen neuen Mitteln elegant ein Problem, das Huygens auf schwerfällige Art mittels klassischer Geometrie schon bearbeitet hatte: das Problem der *Isochrone* (oder *Tautochrone*). Sie erwies sich natürlich, wie schon bei Huygens, als eine Zykloide. Gegen Schluß seiner Arbeit hatte Jakob eine Sache in Erinnerung gerufen, die schon Galilei vergeblich angegriffen hatte: das Problem der *Kettenlinie*. Jakob hatte es mit seinem dreizehn Jahre jüngeren Bruder Johann auf einem Spaziergang in Basel hin und her gewendet. Der fixe Johann löste es daraufhin rasch mit dem neuen *calculus*, erlebte damit seinen ersten großen Triumph über den bedächtigen Bruder — und ließ es diesen auch fühlen! Der erste Riß im Verhältnis der beiden Brüder war da. Der zweite (und unheilbare) kam an einem Wendepunkt in der Entwicklung des *calculus*, als ein Problem ganz neuer Art die Bühne betrat.

In jenen Tagen pflegten sich die Mathematiker mit öffentlich gestellten Aufgaben „herauszufordern" (*provocare* oder *défier*). Im Juni 1696

[49]Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften 162, S. 10
[50]G. W. Leibniz: Mathematische Schriften, Bd. V, S. 307

veröffentlichte Johann als *provocatio* ein PROBLEMA NOVUM, zu dessen Lösung er „die tieferdenkenden“ Mathematiker „einlud“. Es handelte sich um das Problem der Brachistochrone. Johann gab den aufreizenden Hinweis, die gesuchte Kurve sei den Geometern bestens bekannt (*notissima*), und er, Johann, werde mit ihr herausrücken, wenn nach Ablauf des Jahres kein anderer sie gefunden hätte.[51]

Der Termin war zu kurzfristig. Johann stellte die Aufgabe 1697 noch einmal, und zwar „den scharfsinnigsten Mathematikern des ganzen Erdkreises“.[52] Diesmal gingen Lösungen ein, u. a. von Newton, Leibniz und auch von Jakob. Die eleganteste Lösung freilich hatte Johann selbst gefunden. Er verwertete brillant eine Analogie zum Fermatschen Prinzip, gewann so eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen und aus ihr die Zykloide als Brachistochrone — also genau dieselbe Kurve, die sich bei Huygens und seinem Bruder schon als Isochrone herausgestellt hatte.[53] Wir können uns leicht vorstellen, daß diese Entdeckung des mathematisch Gleichen im physikalisch Ungleichen für Johann ein rauschhaftes Erlebnis gewesen sein mußte; voller Stolz schreibt er denn auch (und stellt sich dabei noch ein wenig über den Altmeister Huygens):

> Zu Recht bewundern wir HUGENIUS, weil er als erster entdeckte, daß ein schwerer Körper die gemeine Zykloide tautochron durchläuft... aber ich weiß nicht, ob Du nicht vor Erstaunen platterdings betäubt sein wirst, wenn ich sage, daß genau diese Zykloide, die *Tautochrona Hugenia*, unsere gesuchte Brachistochrone ist.[54]

Jakobs Lösung war bei weitem nicht so elegant wie die seines Bruders, aber sie war zukunftsträchtiger (ohne daß Johann das merkte). Jakob hatte erkannt, daß hier ein Extremwertproblem neuer Art vorlag: Es ging nicht mehr darum, in einer Menge von *Punkten* einen zu finden, in dem eine *Funktion* einen Extremwert hat, sondern in einer Menge von *Funktionen* eine zu finden, in der ein „*Funktional*“ extremal wird. Und dieses völlig neuartige Problem ging Jakob nicht mit einer zufällig sich einstellenden Analogie, sondern auf viel breiterer Front an. Das gab seiner Arbeit den Anstrich der Umständlichkeit und Schwerfälligkeit — und Johann konnte

---

[51] Opera I, S. 155-161

[52] Opera I, S. 166

[53] Die Bernoullischen Überlegungen sind (in heutiger Sprache) dargestellt in meinem Buch *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 2. Aufl., Stuttgart 1991, S. 121-124

[54] Opera I, S. 189

sich nicht genug darüber mokieren —, aber sie war der Anfang der *Variationsrechnung* und darf deshalb ein Markstein in der Mathematikgeschichte genannt werden.

Jakob, von seinem Bruder vielfach gereizt, jetzt aber im Besitz einer tragfähigen Methode, forderte nun seinerseits den Überheblichen mit einem neuen Variationsproblem heraus. Johann erledigte die Sache „in drei Minuten" — freilich falsch. Jakob ließ nicht locker: Höhnisch, erbarmungslos und öffentlich legte er dem Bruder die Daumenschrauben an und drehte sie langsam, langsam immer weiter zu. Die Auseinandersetzung wurde schließlich in einem Rinnsteindialekt geführt, der den wissenschaftlichen Journalen nicht mehr druckfähig schien. In dieser Atmosphäre also ist die imponierende Variationsrechnung entstanden.

Nach der Erfindung des Leibnizschen *calculus* begann die Pariser Akademie damit, die altertümlich-geometrischen Darstellungen der Newtonschen *Principia* durch modern-analytische zu ersetzen. Johann Bernoulli schloß sich diesen Bemühungen an, fand dabei einige Irrtümer in dem Jahrtausendbuch und verbesserte sie. Newtons glühendster Anhänger, sein „Kettenhund" Keill, wollte dem Schweizer diese Majestätsbeleidigung eintränken und „provozierte" ihn dazu, die Bahn eines Projektils in einem Medium zu bestimmen, dessen Widerstand dem *Quadrat* der Geschwindigkeit proportional ist. Johann konterte sofort mit der höhnischen *provocatio*, der Schotte möge doch bitte dasselbe im Falle eines Widerstandes tun, der *irgendeiner* Potenz der Geschwindigkeit proportional ist — und wenn ihm das nicht gelänge, sollte er wenigstens seine Dummheit eingestehen.[55] Keill gab auf. Aus Querelen dieser Art ist die *Ballistik* entstanden. Die Affäre demonstriert drastisch, wie sehr die geschmeidige Leibnizsche Mathematik schon zu Newtons Lebzeiten der englischen den Rang ablief.

Es war übrigens auch dieser unselige Keill gewesen, der die Lawine des Prioritätsstreits zwischen Leibniz und Newton losgetreten hatte; der Streit hätte gar nicht entstehen können, wenn Newton nicht geradezu krankhaft publikationsscheu gewesen wäre. Diesen Streit hatte die *Royal Society* 1712 mit Hilfe eines zweckdienlich besetzten Komittes entfacht; Newton selbst war seit 1703 Präsident der Gesellschaft, tat aber so, als schwebe er unbeteiligt über allem. Natürlich stand Johann auf Leibnizens Seite.

[55] Opera II, S. 393-402

Schon aus persönlichen Gründen war er schlecht auf den Sekretär der *Royal Society*, Brook Taylor, zu sprechen: Die „Taylorsche Reihe“ hatte er nämlich selbst als eine *series universalissima* der Sache nach schon 1694 vorgestellt, aber Taylor hatte dies in seinem Buch *Methodus incrementorum directa et inversa* von 1715, in dem seine Reihe erscheint, mit keinem Wort erwähnt.

Nachdem Leibniz und Newton gestorben waren, galt Johann Bernoulli als der größte lebende Mathematiker (was er für richtig hielt). Sein Glück wurde freilich getrübt durch seinen Sohn Daniel, weil nämlich *dieser* und nicht *er*, der Vater, einen begehrten Preis der Pariser Akademie gewonnen hatte. Johann zog die unvermeidliche Konsequenz und warf den mißratenen Sprößling aus dem Haus. Wenn Daniel nun in *Basel* erfahren wollte, was sein Vater in *Basel* trieb, schrieb er nach *St. Petersburg* an seinen Freund Euler, der seinerseits einen regen Briefwechsel mit Johann führte. Das war eine rohe Vorform der heutigen Satellitenübertragung.

Mit Euler hebt eine neue Epoche des *calculus* an. Davon aber soll in diesem Rahmen nichts mehr erzählt werden.